

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 11 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
21. Januar 2022

Aufgabe 1 (jeweils 2 Punkte). Berechnen Sie, sofern existent, die folgenden Grenzwerte:

$$(i) \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\cos x - 1},$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x}, \quad (v) \lim_{x \searrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

Begründen Sie Ihre Rechnungen sorgfältig.

Lösung. (i) Es ist

$$\lim_{x \searrow 0} (\cos(x) - 1) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \tan(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0.$$

Zudem existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos x - 1)}{\frac{d}{dx}(\tan x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0.$$

Die Voraussetzungen der Regel von l'Hospital sind somit erfüllt und es folgt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x - 1}{\tan x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\cos x - 1)}{\frac{d}{dx}(\tan x)} = 0.$$

(ii) Wir bemerken zunächst, dass stures Anwenden der Regel von l'Hospital hier nicht zum Ziel führt, denn sukzessives Ableiten des Zählers und des Nenners führt immer wieder zum selben Ausdruck.

Der Grenzwert lässt sich aber mit bekannten Mitteln leicht berechnen: Aus der Tatsache, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = 0$ folgt sofort

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$$

(iii) Zähler sowie Nenner konvergieren offensichtlich gegen 0. Ableiten liefert

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^x) = x^2 e^x + 2x e^x = (x^2 + 2x)e^x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\cos x - 1) = -\sin x.$$

Beide Ausdrücke konvergieren immer noch gegen 0 für $x \rightarrow 0$, also lässt sich die Regel von l'Hospital zunächst nicht anwenden.

Wir probieren unser Glück erneut und leiten nochmal ab:

$$\frac{d}{dx}((x^2 + 2x)e^x) = (x^2 + 2x)e^x + (2x + 2)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$$

und

$$\frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x.$$

Tatsächlich gilt für den nun erhaltenen Quotienten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4x + 2)e^x}{-\cos x} = \frac{(0 + 0 + 2)e^0}{-1} = -2,$$

also folgt aus zweimaliger Anwendung der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 e^x}{\cos x - 1} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^x)}{\frac{d^2}{dx^2}(\cos x - 1)} = -2.$$

Analog ist auch der linksseitige Grenzwert -2 und damit auch der (beidseitige) Grenzwert.

(iv) Wir berechnen zunächst

$$\frac{d}{dx}(\sin x + 2x) = \cos x + 2 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}(\cos x + 2x) = -\sin x + 2.$$

Die Funktion

$$\frac{\cos x + 2}{-\sin x + 2}$$

hat keinen Grenzwert für $x \rightarrow \infty$, also ist die Regel von l'Hospital nicht anwendbar. Das heißt jedoch nicht, dass der ursprünglich gesuchte Grenzwert nicht existiert, denn die Voraussetzungen der Regel von l'Hospital sind nicht notwendig für die Existenz des Grenzwerts. In der Tat liefert eine Umformung

$$\frac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x} = 1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + 2x}.$$

Da der Zähler beschränkt ist durch 2 und der Nenner bestimmt gegen ∞ divergiert für $x \rightarrow \infty$, folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x} = 1.$$

(v) Um die Regel von l'Hospital anzuwenden, bringen wir den Ausdruck zunächst in die gewünschte Form:

$$\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}.$$

Zähler und Nenner konvergieren gegen 0 für $x \searrow 1$. Ableiten liefert

$$\frac{d}{dx}(x-1-\ln x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}((x-1)\ln x) = \frac{x-1}{x} + \ln x = 1 - \frac{1}{x} + \ln x,$$

also liefert l'Hospital wieder zunächst keine Aussage. Wir leiten nochmals ab:

$$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{x} + \ln x\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Es folgt mit zweimaliger Anwendung der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \searrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \searrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

□

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte). (i) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, aber nicht differenzierbar im Punkt $x = 0$.

(ii) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist nicht stetig im Punkt $x = 0$.

Lösung. (i) Stetigkeit außerhalb der 0 ist klar. Für alle $x \neq 0$ ist

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

also folgt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, was zeigt, dass f auch im Punkt $x = 0$ stetig ist.

Differenzierbarkeit von f außerhalb der 0 folgt aus Produkt- und Kettenregel. Für $x \neq 0$ berechnet sich der Differenzenquotient zu

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x},$$

und letzterer Ausdruck besitzt keinen Grenzwert für $x \rightarrow 0$. In der Tat: Betrachte beispielsweise die Folgen

$$a_n := \frac{1}{n\pi} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{(\frac{1}{2} + 2n)\pi}.$$

Beide Folgen konvergieren gegen 0, aber

$$\sin \frac{1}{a_n} = \sin(n\pi) = 0, \quad \sin \frac{1}{b_n} = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi\right) = 1.$$

(ii) Differenzierbarkeit außerhalb der 0 folgt wieder aus Produkt- und Kettenregel, es gilt

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für $x \neq 0$. Für solche x gilt zudem

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

was Differenzierbarkeit in 0 mit $f'(0) = 0$ beweist. Da $\cos(1/x)$ keinen Grenzwert für $x \rightarrow 0$ besitzt (mit einer ähnlichen Begründung wie vorher), ist f' in 0 nicht stetig. $\square$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Betrachten Sie die Funktion $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{3x} \ln x$. Zeigen Sie, dass f genau zwei lokale Extrema besitzt und bestimmen Sie deren Art.

Lösung. Wir leiten zunächst ab und erhalten

$$f'(x) = \frac{1}{x} e^{3x} g(x)$$

mit $g(x) = 1 + 3x \ln x$. Ableiten von g liefert

$$g'(x) = 3 + 3 \ln x.$$

Auf dem Intervall $]0, 1/e[$ ist $g' < 0$, g also streng monoton fallend, auf dem Intervall $]1/e, \infty[$ ist $g' > 0$, g also streng monoton wachsend. Ferner ist

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Wegen $g(1/e) < 0$ folgt aus den genannten Tatsachen und dem Zwischenwertsatz, dass g genau zwei Nullstellen ξ_1, ξ_2 auf $]0, \infty[$ besitzt mit $\xi_1 \in]0, 1/e[$, $\xi_2 \in]1/e, \infty[$. Zusammengefasst bedeutet das für f' :

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in]0, \xi_1[\cup]\xi_2, \infty[\\ < 0 & \text{für } x \in]\xi_1, \xi_2[\end{cases}$$

und $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Also hat f bei ξ_1 ein lokales Maximum und bei ξ_2 ein lokales Minimum. $\square$

Aufgabe 4 (4+1+4+1 Punkte). Gegeben sei die Funktion $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-1/x}$.

- (i) Beweisen Sie: f ist beliebig oft differenzierbar und für die n -te Ableitung, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$f^{(n)}(x) = p_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x}$$

mit einer Folge von Polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die die folgende Rekursionsgleichung erfüllen:

$$p_0(z) = 1, \quad p_{n+1}(z) = z^2(p_n(z) - p'_n(z)) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

- (ii) Berechnen Sie $p_1(z), p_2(z)$ und $p_3(z)$ und damit $f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$ für $x > 0$ explizit.

- (iii) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0.$$

- (iv) Folgern Sie aus den vorherigen Teilaufgaben, dass die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist mit $g^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung. (i) Wir führen den Beweis mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Die Exponentialfunktion und die Funktion $x \mapsto -1/x$ sind differenzierbar auf $]0, \infty[$, also ist auch f nach der Kettenregel differenzierbar. Für die Ableitung folgt ebenfalls aus der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = p_1\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x},$$

denn $p_1(z) = z^2(p_0(z) - p'_0(z)) = z^2 \cdot (1 - 0) = z^2$.

Induktionsschritt: Angenommen, f ist n -fach differenzierbar für ein $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$$

(Induktionsannahme). Anhand dieser Formel sieht man sofort, dass $f^{(n)}$ wieder differenzierbar ist (Produkt- und Kettenregel). Wir leiten mittels Produktregel ab:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left(p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dx} p_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot e^{-1/x} + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{d}{dx} e^{-1/x} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} p'_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(p_n\left(\frac{1}{x}\right) - p'_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-1/x} = p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung haben wir die Induktionsannahme benutzt. Dies schließt den Induktionsbeweis ab.

(ii) Einsetzen in die Formel ergibt

$$\begin{aligned} p_1(z) &= z^2, \\ p_2(z) &= z^4 - 2z^3, \\ p_3(z) &= z^6 - 6z^5 + 6z^4 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-1/x}, \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x}, \\ f'''(x) &= \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x} \end{aligned}$$

für $x > 0$.

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Anhand der Rekursionsvorschrift für p_n sehen wir, dass der Grad von p_n höchstens $2n$ ist (leichter Induktionsbeweis). Daraus folgt

$$\lim_{x \searrow 0} x^{2n+1} |p_n(1/x)| = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{|p_n(y)|}{y^{2n+1}} = 0.$$

Wir schätzen die Exponentialfunktion entsprechend ab: Für $x > 0$ ist

$$e^{1/x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/x)^k}{k!} \geq \frac{(1/x)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{1}{x^{2n+2}} \frac{1}{(2n+2)!},$$

also

$$e^{-1/x} \leq (2n+2)! x^{2n+2}.$$

Zusammen genommen erhalten wir für $x > 0$

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{x} \right| \leq \frac{(2n+2)! x^{2n+2} |p_n(1/x)|}{x} = (2n+2)! x^{2n+1} |p_n(1/x)| \xrightarrow{x \searrow 0} 0,$$

wie gewünscht.

(iv) Links der 0 ist $g = 0$ und damit existieren dort beliebig viele Ableitungen, welche ebenfalls konstant 0 sind. Rechts der 0 ist g nach Teilaufgabe (i) beliebig oft differenzierbar. Aus Teilaufgabe (iii) folgt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = 0,$$

also

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = 0.$$

□